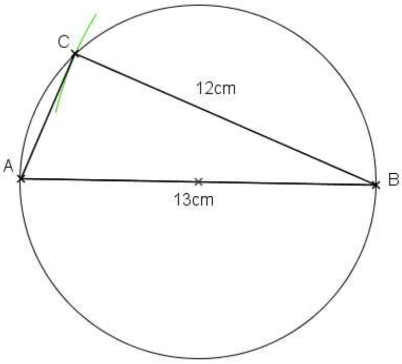
Le théorème de Pythagore et sa réciproque

Exercice 1 : Corrigé

a)



b) Le triangle *ABC* est inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ et son côté [*AB*] est un diamètre de ce cercle donc le triangle *ABC* est un triangle rectangle en *C*.

c) Le triangle *ABC* est un triangle rectangle en *C*, on peut donc appliquer le théorème de Pythagore :
$AB^2 = AC^2 + BC^2$
$13^2 = AC^2 + 12^2$
$169 = AC^2 + 144$
$AC^2 = 169 - 144$
$AC^2 = 25$
AC = 5 cm

Exercice 2 : Corrigé

a) *ADM* est rectangle en *A*, *BMC* est rectangle en *B*.

b) Dans le triangle *ADM* rectangle en *A*, appliquons le théorème de Pythagore:
$DM^2 = AD^2 + AM^2$
$DM^2 = 28{,}8^2 + 21{,}6^2$
$DM^2 = 829{,}44 + 466{,}56$
$DM^2 = 1296$
DM = 36 cm.

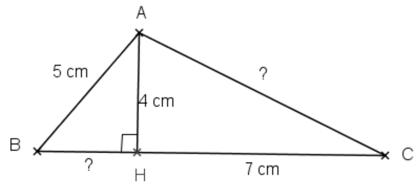
Dans le triangle *BMC* rectangle en *B*, appliquons le théorème de Pythagore:
$MC^2 = BM^2 + BC^2$
$MC^2 = (AB - AM)^2 + BC^2$
$MC^2 = 38{,}4^2 + 28{,}8^2$
$MC^2 = 1474{,}56 + 829{,}44$
$MC^2 = 2304$
MC = 48 cm.

c) *DM* = 36 cm ; *MC* = 48 cm et *DC* = 60 cm. [*DC*] est le plus grand côté, donc si *DMC* est un triangle rectangle, [*DC*] est son hypoténuse.
$DC^2 = 60^2 = 3600$
$DM^2 + MC^2 = 1296 + 2304 = 3600$

Donc $DC^2 = DM^2 + MC^2$
La réciproque du théorème de Pythagore permet de conclure que le triangle *DMC* est rectangle en *M*.

Exercice 3 : Corrigé

a) [*AH*] est la hauteur du triangle *ABC* issue de *A*,
donc [*AH*] et [*BC*] sont perpendiculaires.
Le triangle *AHC* est donc un triangle rectangle en *H*, on peut appliquer le théorème de Pythagore:



$AC^2 = AH^2 + HC^2$
$AC^2 = 4^2 + 7^2$
$AC^2 = 16 + 49$
$AC^2 = 65$
AC = ≈ 8,1 cm (arrondi au mm près)

b) Le triangle *ABH* est aussi un triangle rectangle en *H*, on peut appliquer le théorème de Pythagore :
$AB^2 = AH^2 + BH^2$
$5^2 = 4^2 + BH^2$
$25 = 16 + BH^2$
$BH^2 = 25 - 16$
$BH^2 = 9$
BH = 3 cm.

c) L'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit d'une base par sa hauteur.
Si $\mathscr{A}$ est l'aire du triangle *ABC*, on a :

$$\mathscr{A} = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{4 \times 10}{2} = 20 \text{ cm}^2.$$

Exercice 4 : Corrigé

- Le périmètre du trapèze est p = AB + BC + CD + AD.
  AB = 4 cm ; AD = 3 cm. Il faut calculer les longueurs BC et CD.

Dans le triangle ADC rectangle en D, on applique le théorème de Pythagore :
$AC^2 = AD^2 + CD^2$
$7^2 = 3^2 + CD^2$
$49 = 9 + CD^2$
$CD^2 = 49 - 9$
$CD^2 = 40$
CD ≈ 6,3 cm.

Dans le triangle BHC rectangle en H, on applique le théorème de Pythagore :
$BC^2 = BH^2 + CH^2$
$BC^2 \approx 3^2 + (6,3 - 4)^2$
$BC^2 \approx 9 + 2,3^2$
$BC^2 \approx 9 + 5,29$
$BC^2 \approx 14,29$
BC ≈ 3,8 cm.

Le périmètre du trapèze ABCD est donc environ égal à 4 + 3 + 6,3 + 3,8 = 17,1 cm.

- L'aire d'un trapèze est égale au produit de sa hauteur par la moitié de la somme de sa grande base et de sa petite base.

  L'aire du trapèze ABCD est donc égale à $BH \times \frac{AB + CD}{2} \approx 3 \times \frac{4 + 6,3}{2} \approx 15 \text{ cm}^2$.

Exercice 5 : Corrigé

Pour recouvrir entièrement une table rectangulaire de 110 cm de long et de 90 cm de large par une nappe ronde de 140 cm de diamètre, il faut que la diagonale du rectangle soit inférieure ou égale au diamètre de la nappe.

Il faut donc calculer la diagonale du rectangle à l'aide du théorème de Pythagore : On obtient environ 142 cm.

La diagonale de la table rectangulaire a une longueur plus grande que la longueur du diamètre de la nappe circulaire donc la nappe ne pourra pas recouvrir toute la table.