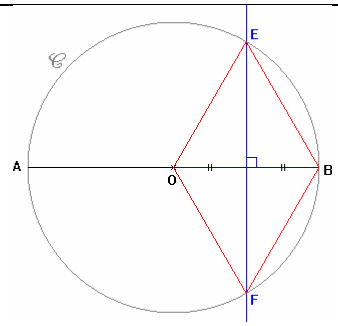
Problème de géométrie plane

Partie A : Corrigé



2) Nature du quadrilatère OEBF :

Le point E est situé sur la médiatrice de [OB] donc EO = EB.
De même, le point F est situé sur la médiatrice de [OB] donc FO = FB.
De plus, [OE] et [OF] sont des rayons du cercle, donc OE = OF.

On conclut que OE = EB = OF = FB, le quadrilatère OEBF a ses quatre côtés de la même longueur, c'est <u>un losange.</u>

3) Nature du triangle ABE :

Le triangle ABE est inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ et son côté [AB] est un diamètre du cercle $\mathscr{C}$.
<u>Le triangle ABE est donc un triangle rectangle en E.</u>

4) Longueur de [EB] et de [AE] :

Comme EB = OE (question 2)) EB = 6 cm.
Le triangle ABE est rectangle en E, on applique la propriété de Pythagore :

$AB^2 = AE^2 + EB^2$ $\quad AE = \sqrt{108}$
$12^2 = AE^2 + 6^2$ $\quad AE = \sqrt{36\times 3}$
$AE^2 = 144 - 36$ $\quad \boxed{AE = 6\sqrt{3}}$
$AE^2 = 108$

5) Le triangle ABE est rectangle, son aire est $\mathscr{A}_{ABE} = \dfrac{AE\times EB}{2} = \dfrac{6\sqrt{3}\times 6}{2}$. Donc, $\boxed{\mathscr{A}_{ABE} = 18\sqrt{3}\ \text{cm}^2}$.

6) Dans le triangle ABE, la droite (OE) est une médiane (elle passe par le sommet E et par le point O, milieu du côté [AB]) ; elle partage le triangle ABE en deux triangles de même aire.
D'où $\mathscr{A}_{AOE} = \mathscr{A}_{EOB} = \mathscr{A}_{ABE} \div 2$. Donc $\boxed{\mathscr{A}_{EOB} = 9\sqrt{3}\ \text{cm}^2}$ et l'aire du quadrilatère OEBF est $\boxed{18\sqrt{3}\ \text{cm}^2}$.

7) Nature du quadrilatère AEBF

D'après la question 2), BE = BF.
(OB) est la médiatrice de la diagonale [EF] dans le losange OEBF, et le point A appartient à (OB).
Donc, AE = AF.
Le quadrilatère AEBF a deux paires de côtés consécutifs de la même longueur, <u>c'est un cerf-volant.</u>
La droite (AB) est un axe de symétrie de ce cerf-volant, l'aire du cerf-volant est égale à deux fois l'aire du triangle ABE, c'est-à-dire $\boxed{18\sqrt{3}\ \text{cm}^2}$.

Partie B : Corrigé

1) Le triangle OEB est équilatéral car ses trois côtés mesurent chacun 6 cm (Partie A).
Chacun de ses angles mesure donc 60°. $\boxed{\widehat{EOB} = 60°}$ et $\boxed{\widehat{EOF} = 120°}$.

2) Dans le cercle $\mathscr{C}$, $\widehat{EAF}$ est un angle inscrit, $\widehat{EOF}$ est un angle au centre, et tout deux interceptent l'arc $\overset{\frown}{EF}$.
On en déduit que $\boxed{\widehat{EAF} = \widehat{EOF} \div 2 = 60°}$.

3) Le triangle AEF est isocèle car AE = AF, il a un angle au sommet de 60°, c'est donc un triangle équilatéral.

4) Les deux triangles AEF et OEB sont équilatéraux. Un côté du triangle OEB mesure 6 cm ; un côté du triangle AEF mesure $6\sqrt{3}$ cm. Le coefficient d'agrandissement est donc égal à $\sqrt{3}$.

5) D'après la propriété sur les agrandissements réductions, $\mathscr{A}_{AOF} = \mathscr{A}_{EOB}\times\sqrt{3}^{\,2} = \mathscr{A}_{EOB}\times 3 = 27\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.